

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

RENNÉ DA SILVA CAMPOS

**DIFERENÇAS FINITAS E IMPLEMENTAÇÃO**

**DA SOMA DE RIEMANN**

JUAZEIRO – BA

(18/07/2025)

# 1. Aproximação de Derivadas com Diferenças Finitas

## 1.1 Introdução

A derivada de uma função f(x) em um ponto x é definida como o limite:

f'(x) = limₕ→0 [f(x + h) - f(x)] / h.

Na prática computacional, não podemos usar um valor infinitesimal de h. Assim, usamos aproximações chamadas diferenças finitas, em que escolhemos um pequeno valor h e calculamos uma razão incremental.

## 1.2 Fórmulas de Diferenças Finitas

Existem três principais formas de diferença finita para estimar a derivada de f:

Diferença Progressiva (Para Frente):  
f'(x) ≈ [f(x + h) - f(x)] / h.  
Ordem de erro: proporcional a h.

Diferença Regressiva (Para Trás):  
f'(x) ≈ [f(x) - f(x - h)] / h.  
Ordem de erro: proporcional a h.

Diferença Central:  
f'(x) ≈ [f(x + h) - f(x - h)] / (2h).  
Ordem de erro: proporcional a h².

Observação: a diferença central é, em geral, mais precisa que as progressiva e regressiva, pois tem erro de ordem quadrática em h.

## 1.3 Exemplo Numérico

Considere f(x) = sen(x) e x = π/4.

Com h = 0.01:

Diferença progressiva:  
f'(π/4) ≈ [sin(π/4 + 0.01) - sin(π/4)] / 0.01.

Diferença central:  
f'(π/4) ≈ [sin(π/4 + 0.01) - sin(π/4 - 0.01)] / (2 × 0.01).

O valor exato da derivada é cos(π/4).

## 1.4 Diferenças Finitas de Ordem Superior

Para derivadas de ordem maior, ou para obter maior precisão, podem ser usadas fórmulas com mais pontos. Por exemplo, para segunda derivada:

f''(x) ≈ [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] / h².

## 1.5 Observações Importantes

- O tamanho h deve ser pequeno, mas não tão pequeno que introduza erros de arredondamento.  
- Aproximações de ordem superior requerem mais pontos e mais operações.  
- Em problemas reais, pode ser necessário testar diferentes valores de h para avaliar o erro numérico.

# 2. Cálculo de Integrais com Soma de Riemann

## 2.1 Definição

A integral definida de uma função contínua f em [a,b] é dada pelo limite da soma de Riemann:

∫ₐᵇ f(x) dx = limₙ→∞ Σ f(xᵢ\*) Δx,

onde:  
- n é o número de subintervalos,  
- Δx = (b - a)/n é o comprimento de cada subintervalo,  
- xᵢ\* é um ponto escolhido dentro do subintervalo [xᵢ₋₁, xᵢ].

## 2.2 Tipos de Soma de Riemann

Dependendo de como escolhemos o ponto xᵢ\*, temos diferentes regras:

Soma à Esquerda:  
xᵢ\* = xᵢ₋₁.

Soma à Direita:  
xᵢ\* = xᵢ.

Soma pelo Ponto Médio:  
xᵢ\* = (xᵢ₋₁ + xᵢ)/2.

Observação: A soma pelo ponto médio costuma ser mais precisa.

## 2.3 Exemplo Numérico

Seja f(x) = x² em [0,1], com n=4:

Δx = 0.25.  
Ponto médio de cada subintervalo:  
xᵢ\* = 0.125, 0.375, 0.625, 0.875.

Soma de Riemann pelo ponto médio:  
Σ (xᵢ\*)² Δx = Σ (xᵢ\*)² × 0.25.

Valor exato:  
∫₀¹ x² dx = 1/3 ≈ 0.3333.

## 2.4 Observações sobre a Precisão

- Quanto maior n, mais precisa a soma.  
- Em casos de funções não suaves, pode ser necessário aumentar ainda mais n.  
- O ponto médio geralmente tem erro proporcional a 1/n², enquanto as somas à esquerda e à direita têm erro proporcional a 1/n.

## 2.5 Relação com Outras Regras de Integração

A soma de Riemann é a forma mais básica de aproximação. Existem outras fórmulas derivadas dela, como:

- Regra dos Trapézios, que aproxima cada subintervalo por um trapézio.  
- Regra de Simpson, que usa parábolas.

Entretanto, para esta atividade, usa-se apenas a soma de Riemann.

# 3. Resultados Importantes e Conclusão

## 3.1 Principais Fórmulas

Diferença finita progressiva (primeira derivada):  
f'(x) ≈ [f(x+h) - f(x)] / h.

Diferença finita central (primeira derivada):  
f'(x) ≈ [f(x+h) - f(x-h)] / (2h).

Diferença finita para segunda derivada:  
f''(x) ≈ [f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] / h².

Soma de Riemann:  
∫ₐᵇ f(x) dx ≈ Σ f(xᵢ\*) Δx.

## 3.2 Considerações Finais

O uso de diferenças finitas e soma de Riemann é fundamental para aproximar derivadas e integrais numericamente. Essas ferramentas:

- Permitem resolver problemas quando não há solução simbólica.  
- São amplamente empregadas em aplicações científicas e engenharia.  
- Exigem atenção à escolha de parâmetros (h e n) para minimizar erros.